

POTENCIACIÓN:

n → exponente
A → base

Debe multiplicarse la base tantas veces como lo indica el exponente:

$$A^3 = A A A$$
$$A^n = \underbrace{A A A \dots}_{n \text{ veces}}$$

Propiedades:

1) La potenciación **no es distributiva** con respecto a la suma

$$(A + B)^n \neq A^n + B^n$$

Lo correcto es: $(5 + 3)^2 = 8^2 = 64$

Para comprobar que la potencia **no es distributiva** con respecto a la suma podemos desarrollar el *Binomio de Newton*:

$$(5 + 3)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3^2 = 25 + 30 + 9 = 64$$

Que se define como el cuadrado del primero, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

2) La potenciación **no es distributiva** con respecto a la resta

$$(A - B)^n \neq A^n - B^n$$

Lo correcto es: $(5 - 2)^2 = 3^2 = 9$; o aplicando el *Binomio de Newton*:

$$5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 + (-2)^2 = 25 - 20 + 4 = 9$$

3) La potenciación **es distributiva** con respecto al producto

$$(A \cdot B)^n = A^n \cdot B^n$$

Ej: $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$ ó $6^2 = 36$

4) La potenciación **es distributiva** con respecto al cociente.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

Ej: $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{7^2}{4^2} = \frac{49}{16} = 3,0625$ ó $1,75^2 = 3,0625$

5) El producto de potencias de igual base, es igual a otra potencia de la misma base cuyo exponente es la suma algebraica de los exponentes dados:

$$A^x \cdot A^y \cdot A^z = A^{(x+y+z)}$$

Ej: $2^2 \cdot 2^{-3} \cdot 2^4 \cdot 2^{-1} = 2^{2+(-3)+4+(-1)} = 2^2 = 4$

6) Cociente de potencias de igual base, es igual a otra potencia de igual base cuyo exponente es la diferencia algebraica entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

$$\frac{A^x}{A^y} = A^{x-y}$$

Ej: $\frac{8^4}{8^6} = 8^{4-6} = 8^{-2} = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{16}$

Recordemos que:

- La potencia con exponente negativo es igual a la inversa de la base elevada a dicha potencia como exponente positivo (como en el ejemplo dado arriba).
- Todo número elevado a la 0 es igual a 1:
Ej: $5^0 = 1$

7) Potencia con exponente fraccionario positivo: Una potencia cuyo exponente es fraccionario positivo, es igual a una raíz cuyo índice es el denominador de la fracción y cuyo numerador es el exponente de la cantidad subradical.

$$\text{Ej: } A^{3/2} = \sqrt[2]{A^3}$$

8) Potencia con exponente fraccionario negativo:

$$\text{Ej: } A^{-3/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{A^3}}$$

9) Potencia de otra potencia: Es igual a otra potencia de la misma base cuyo exponente es igual al producto de los exponentes dados.

$$\begin{aligned} \text{Ej: } (A^2)^3 &= A^6 \\ (A^2)^{-1} &= A^{-2} = (1/A)^2 \end{aligned}$$

RADICACIÓN

El resultado de la raíz enésima de un número real, es un número cuya potencia enésima es igual al número dado.

$$\sqrt[n]{A} = B \quad \text{si} \quad B^n = A$$

Propiedades:

1) La radicación **no es distributiva** con respecto a la suma.

$$\sqrt[n]{A+B} \neq \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}; \text{ lo correcto es: } \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$$

2) La radicación **no es distributiva** con respecto a la resta

$$\sqrt[n]{A-B} \neq \sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B}; \text{ lo correcto es } \sqrt{120-20} = \sqrt{100} = 10$$

3) La radicación **es distributiva** con respecto al producto

$$\sqrt[n]{A \cdot B \cdot C} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C}$$

4) La radicación **es distributiva** con respecto al cociente

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{B}$$

B

Recordar:

- Cuando el índice de la raíz es **par**, el resultado puede ser tanto negativo como positivo:

$$\text{Ej: } \sqrt{4} = \pm 2 \quad \text{pues} \quad (-2)^2 = 2^2 = 4$$

- Cuando el índice de la raíz es **par** y el radicando **negativo** no tiene solución real:

$$\text{Ej: } \sqrt{-5} = \text{no tiene solución en los números reales}$$

- Cuando el índice de la raíz es **impar** y el radicando **negativo** tiene solución negativa:

$$\text{Ej: } \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{pues} \quad (-2)^3 = -8$$

5) la potencia **n** de la raíz **n** de un número real es igual a dicho número

$$\text{Ej: } \sqrt[n]{A^n} = A$$

6) Raíz de otra raíz: se multiplican los índices de las raíces

$$\text{Ej: } \sqrt[2]{\sqrt[3]{A}} = \sqrt[6]{A}$$

NOTACIÓN CIENTÍFICA:

En muchas ciencias se emplean números muy grandes o muy pequeños, que son muy difíciles de escribir y, que además, es muy delicado trabajar con ellos.

Para expresar números de muchas cifras y poder simplificar operaciones, se utiliza normalmente la forma de producto de las cifras significativas por una potencia de 10, lo que se denomina *Notación científica*.

$$\begin{aligned} \text{Ej: } 358000 &= 3,58 \times 10^5 \\ 0,0000358 &= 3,58 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Siempre se deja una cifra significativa (distinta de cero) antes de la coma, y se acompaña el número resultante con un factor de 10 elevado a un exponente igual al número de lugares que se ha corrido la coma. El exponente es positivo si se han corrido hacia la izquierda, y negativo si fue hacia la derecha.

ECUACIONES

Expresiones algebraicas: Se llama expresión algebraica a una combinación de letras y/o números, vinculados entre sí por las operaciones de suma, resta, producto, cociente, potencia e índice radical.

Ej: $4a^2b - 2b + 8 \mid c$

Ecuación algebraica: Se llama así a la **igualdad** entre dos expresiones algebraicas, que sólo se verifica para determinados valores de algunas de sus letras, llamadas incógnitas. Los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación se llaman raíces de la ecuación.

Ej: $3x - 2 = 4 \Rightarrow$ ecuación con raíz $x = 2$

Las normas a seguir para resolver este tipo de ecuaciones son las siguientes:

a) Todo término que se encuentra en un miembro multiplicando pasará al otro miembro dividiendo

Ej: $a = bx \Rightarrow a/b = x$

b) Todo término que se encuentra en un miembro dividiendo pasará al otro miembro multiplicando.

Ej: $x/b = a \Rightarrow x = a \cdot b$

c) Todo término que se encuentra en un miembro sumando pasará al otro miembro restando

Ej: $x + a = b \Rightarrow x = b - a$

d) Todo término que se encuentra en un miembro restando pasará al otro miembro sumando.

Ej: $x - a = b \Rightarrow x = b + a$

e) En primer lugar deben pasar los términos que estén multiplicando o dividiendo

f) En el caso de encontrarse una operación de suma o resta dentro de un paréntesis en uno de los miembros, puede resolverse o bien, puede pasarse el total del paréntesis al otro miembro.

Ej: $(a + b)x = c \Rightarrow x = \frac{c}{(a + b)}$

Recordar la regla de los signos:

$+x + = +$	$+ / + = +$
$+x - = -$	$+ / - = -$
$-x - = +$	$- / - = +$

ECUACIONES ALGEBRAICAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Las ecuaciones algebraicas enteras pueden clasificarse según su grado. El grado está dado por el mayor exponente al que está elevada la incógnita.

Ej:

$5x - 3 = 2x \Rightarrow$ es una ecuación de primer grado

$3x^2 - 8x = 0 \Rightarrow$ es una ecuación de segundo grado

Toda ecuación de primer grado con una incógnita, si tiene solución, ésta es única.

Para resolver una ecuación de este tipo, hay que reducirla (mediante pasaje de términos) a una expresión de la forma:

$$ax + b = 0$$

Si $a \neq 0$ la raíz de la ecuación es $x = -b/a$

Si $a = 0$ y $b \neq 0$ la ecuación no tiene solución.

Si $a = b = 0$, la ecuación es una identidad que se satisface para cualquier valor de x .

Ejemplos:

1) Resolver la ecuación: $7x - 3 = 21x - 9$

Hacemos:

$$7x - 21x = -9 + 3 \quad \Rightarrow \quad -14x = -6 \quad \Rightarrow \quad x = 3/7 \text{ es la raíz}$$

2) Resolver

$$2/5 x - 1 = 1/4 x + 2$$

$$2/5 x - 1/4 x = 2 + 1$$

$$\frac{8x - 5x}{20} = 3$$

$$20$$

$$3x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

3) Resolver:

$$\frac{15-x}{x-18} = \frac{7-x}{x-8}$$

La llevamos a una ecuación de primer grado haciendo:

$$(15-x)(x-8) = (7-x)(x-18)$$

Aplicamos propiedad distributiva:

$$15x + 8x - 18x = -126 + 120$$

$$5x = -6$$

$$x = \frac{-6}{5}$$

Observación:

Es importante verificar las soluciones que se obtengan para cada ecuación. Por ejemplo, para la ecuación (1):

$$7 \cdot \frac{3}{7} - 3 = 21 \cdot \frac{3}{7} - 9$$

$$3 - 3 = 9 - 9 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

El conjunto de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Constituye un sistema de dos ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas "x" e "y". La solución del sistema es el par de valores que deben tomar x e y para satisfacer ambas ecuaciones simultáneamente.

$$\text{Sea el sistema} \quad 3x + 2y = 78$$

$$4x + y = 54$$

La ecuación $3x + 2y = 78$ tiene infinitas soluciones. Por ejemplo: $x = 0, y = 39$; $x = 10, y = 24$; $x = 30, y = -6$;

La ecuación $4x + y = 54$ también tiene infinitas soluciones. Por ejemplo: $x = 0,$

$y = 54; x = 10, y = 14; x = 6, y = 30; \dots$

De todas estas infinitas soluciones de cada ecuación, sólo hay una que coincide en ambas: $x = 6, y = 30$. Esta es la **solución del sistema**.

Los métodos para resolver sistemas de ecuaciones consisten en obtener la solución en forma rápida y automática, sin recurrir al tanteo.

Método de sustitución:

Sea el sistema:

$$3x + 2y = 78 \quad (1)$$

$$4x + y = 54 \quad (2)$$

de la ecuación (2) expresamos “y” en función de “x”:

$$y = 54 - 4x \quad (3)$$

sustituimos “y” en la ecuación (1) por esta expresión:

$$3x + 2(54 - 4x) = 78$$

Resolvemos esta ecuación con una incógnita:

$$3x + 108 - 8x = 78$$

$$3x - 8x = 78 - 108 \Rightarrow -5x = -30 \quad \text{y por lo tanto} \quad x = 6$$

Este valor de “x” hallado se sustituye en la ecuación (3) que es aquella en la que aparecía despejada “y”: $y = 54 - 4 \cdot 6 \Rightarrow y = 54 - 24 \Rightarrow y = 30$

La solución es por lo tanto $x = 6; y = 30$

Resumen: El método consiste en expresar una incógnita en función de la otra, despejándola de una de las ecuaciones. Con esa expresión, reemplazándola en la otra ecuación, se halla su valor.

Sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones.

$$\text{Sea el sistema: } \begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 6x + 10y = 8 \end{cases}$$

Se puede observar que las dos ecuaciones son prácticamente la misma: una de ellas es la otra multiplicada por un número. En este caso, las infinitas soluciones de una serán también soluciones de la otra. El sistema tiene infinitas soluciones y se llama sistema compatible indeterminado.

Sistemas de ecuaciones sin solución:

$$\text{Sea el sistema } \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$$

En él se puede observar que si $3x - 5y$ es igual a 4, es imposible que $3x - 5y$ también sea igual a 2. Por lo tanto no es posible encontrar una solución común a ambas ecuaciones. El sistema no tiene solución y se llama incompatible.

Al resolverlo se llega a una expresión del tipo $0 \cdot x = 2$ la cual es un absurdo para todo valor de x.